Конспект к лекции 4. (Казань, 5 апреля 2017 г.)

9 Классические произведения графов

Напомним, что мы уже встречались с некоторым способом умножения графа на самого себя. Возведением графа G в степень k называется следующая операция: мы сохраняем прежнее множество вершин, а рёбрами в новом графе считаем все пути длины k в исходном графе. Результат возведения графа в степень k мы обозначаем G^k. Если исходный граф был однородным степени d, то его k-ая степень будет также однородным графом, но степени d^k. Если M — матрица исходного графа, то матрицей его k-ой степени будет будет M^k (обычное возведение матрицы в степень k). При этом собственные векторы матрицы сохраняются, а собственные числа также возводятся в степень k.

Нетрудно также определить тензороное произведение графов. Для произвольных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ назовём их *тензороным произведением* граф $G = (V, E)$, в котором множество вершин $V = V_1 \times V_2$ (каждая вершина в новом графе есть пара вершин исходных графов), а рёбрами соединяются все такие пары (v_1, v_2) и (v_1', v_2'), для которых

$$\{v_1, v_1'\} \in E_1 \text{ и } \{v_2, v_2'\} \in E_2.$$

Тензорное произведение графов G_1 и G_2 мы обозначаем $G_1 \otimes G_2$.

Упражнение 9.1 *Объясните, как из матриц графов G_1 и G_2 получить матрицу тензорного произведения $G_1 \otimes G_2$.*

Упражнение 9.2 *Пусть спектр графа G_1 состоит из чисел*

$$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{1,n},$$

а спектр граф G_2 состоит из чисел

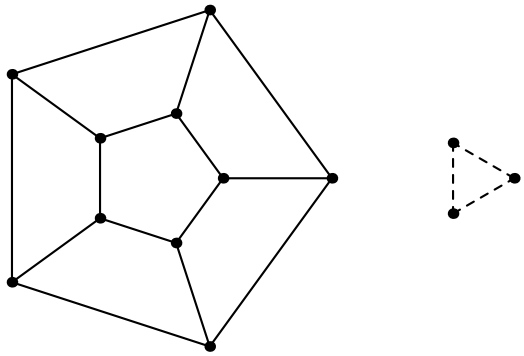
$$\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \ldots, \lambda_{2,m}.$$

Докажите, что спектр $G_1 \otimes G_2$ состоит из всевозможных произведений $(\lambda_{1,i} \cdot \lambda_{2,j})$.

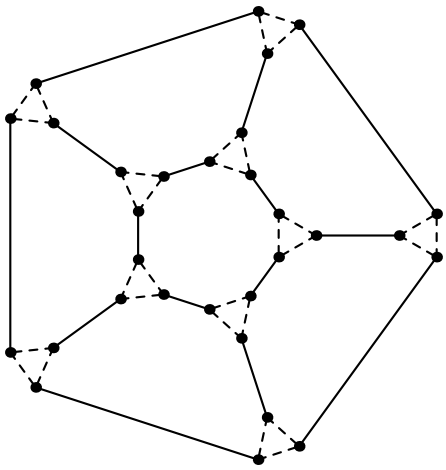
10 Конструкция зигзаг-произведение графов

В этой главе мы изучим метод, позволяющий получать экспандеры с хорошими параметрами с помощью особого «произведения» графов. Это произведение позволяют «собирать» большие спектральные экспандеры из маленьких блоков (а подходящего вида маленькие блоки, которые и сами должны быть эспандерами, мы можем найти перебором.)

Пусть даны два графа $G(n, D)$ и $H(D, d)$. Запись в скобках указывает параметры: число вершин и степень каждой вершины (одинаковую для всех вершин). Пусть при этом число вершин второго графа равно степени первого (как в примере на рисунке).



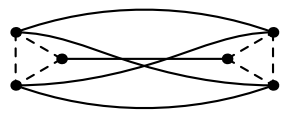
Мы определим *загзаг-произведение* этих графов. Для этого каждую вершину первого графа заменим маленькой копией второго графа, прикрепив рёбра первого графа к вершинам второго. (В маленьком графе как раз нужное число вершин.) Обратим внимание, что в прикреплении есть произвол — конкретный выбор соответствия в каждой вершине не играет роли. Получится граф с nD вершинами и рёбрами двух типов — большими рёбрами, унаследованными из из первого графа, и малыми , унаследованными из второго. (На рисунке — сплошные и пунктирные линии соответственно.)



Зигзаг-произведение (zig-zag product): Вершины у зигзаг-произведения будут те же, но рёбра совсем другие. В качестве рёбер нового графа мы берём все пути длины 3 вида

[пунктирное ребро] – [сплошное ребро] – [пунктирное ребро].

Другими словами, каждое сплошное ребро порождает d^2 рёбер зигзаг-произведения (соединяющих пары пунктир-соседей концов сплошного ребра), как показано на рисунке (рёбра зигзаг-произведения показаны кривыми линиями):



Легко видеть, что все вершины зигзаг-произведения имеют степень d^2 (каждое из двух пунктирных рёбер можно выбрать d способами).

Опишем матрицу графа, полученного в результате зигзаг-произведения. Для этого мы рассмотрим две матрицы размера $nD \times nD$ (координаты соответствуют вершинам графа). Первая матрица $\tilde{H}$ есть матрица графа с рёбрами из пунктирных линий, вторая матрица $\tilde{G}$ соответствует графу с теми же вершинами, но с рёбрами из сплошных линий. (Обозначения показывают, что эти матрицы происходят из соответственно первого и второго графов, участвующих в зигзаг-произведении). В $\tilde{H}$ каждый столбец и каждая строка содержат d единиц, а в $\tilde{G}$ — только одну единицу. Отметим, что $\tilde{G}$ задаёт перестановку на множестве вершин, и её норма равна единице. Ясно, что матрицей зигзаг-произведения будет произведение матриц $\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}$.

Далее мы докажем оценки для второго собственного числа зигзаг-произведения.

11 Первая спектральная оценка для зигзаг-произведения

Докажем, что зигзаг-произведение двух графов, у которых малы вторые (по абсолютной величине) собственные числа, тоже имеет небольшое второе собственное число.

Теорема 11.1 *Зигзаг-произведение спектрального (n, D, α)-экспандера G и спектрального (D, d, β)-экспандера H является спектральным экспандером с параметрами $(nD, d^2, \leqslant \alpha + 2\beta + \beta^2)$.*

Замечание. Можно улучшить оценку для второго собственного числа до $\alpha+\beta$, но мы ограничимся доказательством более слабого (и более простого) утверждения.

Доказательство: Чтобы оценить второе собственное значение симметричной матрицы, надо ограничить квадратичную форму на ортогональное дополнение к первому собственному вектору $\mathbf{e}_0 = (1, \ldots, 1)$ и взять её максимум на единичном шаре. Другими словами, модуль второго собственного числа матрицы $\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}$ есть максимум выражения

$$|\mathbf{f}\, H\tilde{G}\tilde{H}\, \mathbf{f}^{\perp}|$$

по всем векторам $\mathbf{f}$ длины nD, имеющим единичную длину и ортогональных e_0 (то есть имеющих нулевую сумму координат). Чтобы оценить это выражение, разложим $\mathbf{f}$ в сумму $\mathbf{f} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_h$ следующим образом: координаты $\mathbf{f}_g$ одинаковы в каждой из «облаков» (копий графа H), а для $\mathbf{f}_h$ на

каждой копии графа H сумма координат равна нулю. Чтобы оценить значение квадратичной формы на произвольном векторе $\mathbf{f} \perp \mathbf{e}_0$, мы отдельно изучим действие матриц $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ на векторы $\mathbf{f}_g$ и $\mathbf{f}_h$:

(a) $\tilde{H}\mathbf{f}_g = d \cdot \mathbf{f}_g$, поскольку внутри каждой копии H веса (координаты) вектора $\mathbf{g}$ одинаковы, и каждый из них распространяется в d соседей в том же облаке.

(b) $\|\tilde{H}\mathbf{f}_h\| \leqslant \beta d \cdot \|\mathbf{f}_h\|$, поскольку вектор $\mathbf{f}_h$ в каждой копии H ортогонален первому собственному вектору матрицы графа H, а все остальные собственные векторы этой матрицы не превосходят (по модулю) βd. (Если в каждой компоненте норма оператора не превосходит βd, то это верно и для всего оператора.)

(c) $|\mathbf{f}_g\, \tilde{G}\, \mathbf{f}_g^{\perp}| \leqslant \alpha \|\mathbf{f}_g\|^2$; в самом деле, квадратичная форма в левой части содержит один ненулевой член для каждого ребра, позаимствованного из графа G (теперь это ребро соединяет две вершины из разных облаков). Поэтому выражение внутри знака модуля из левой части равно $(\hat{\mathbf{f}_g})M(G)\hat{\mathbf{f}_g}^{\perp}$, где $M(G)$ — матрица смежности графа G, а $\hat{\mathbf{f}_g}$ получается из $\mathbf{f}_g$ склеиванием равных значений в каждой компоненте. При этом сумма координат в $\hat{\mathbf{f}_g}$ (как и в исходном векторе $\mathbf{f}$) равна нулю. Поэтому данное выражение (по предположению о графе G) оценивается как $\alpha D \|\hat{\mathbf{f}_g}\|^2$, что равно как раз $\alpha \|\mathbf{f}_g\|^2$.

Теперь мы можем оценить искомое выражение:

$$|\mathbf{f}\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}\mathbf{f}^{\perp}| = |(\mathbf{f}_g + \mathbf{f}_h)\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}(\mathbf{f}_g + \mathbf{f}_h)^{\perp}| \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{f}_g\, \tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}\, \mathbf{f}_g^{\perp}| + 2|\mathbf{f}_g\, \tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}\, \mathbf{f}_h^{\perp}| + |\mathbf{f}_h\, \tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}\, \mathbf{f}_h^{\perp}|.$$

Первое из трёх слагаемых равно $d^2|\mathbf{f}_g\, \tilde{G}\, \mathbf{f}_g|$ по свойству (a) и потому не превосходит $\alpha d^2 \|\mathbf{f}_g\|^2$ по (b). Второе слагаемое не превосходит $2 \cdot (\beta d) \cdot d \cdot \|\mathbf{f}_g\| \cdot \|\mathbf{f}_h\|$ (матрица $\tilde{G}$ есть матрица перестановки и сохраняет норму). Наконец, третье слагаемое не превосходит $(\beta d)^2 \|\mathbf{f}_h\|^2$ по аналогичным причинам. В этих оценках можно заменить $\|\mathbf{f}_g\|$ и $\|\mathbf{f}_h\|$ на $\|\mathbf{f}_f\|$. В итоге мы получаем получить

$$(\alpha + 2\beta + \beta^2)\|\mathbf{f}\|^2,$$

и теорема доказана.

12 Две рекурсивные конструкции с зигзаг-произведением

Построим последовательность явно заданных графов одной и той же степени с растущим числом вершин, имеющих малые собственные числа. Основная идея: возводя матрицу в квадрат, мы не меняем число вершин графа и уменьшаем (возводим в квадрат) нормализованное (т.е. делённое на

степень графа) второе собственное число. Зато мы увеличиваем (тоже возводим в квадрат) степень вершины. Но это можно скомпенсировать зигзаг-умножением на фиксированный граф H.

Опишем конструкцию более подробно. Зафиксируем граф $H(d^4, d, 1/10)$ для некоторого d (для достаточно больш*и*х d такой граф, как мы видели, существует). Затем построим последовательность графов $G_0, G_1, \ldots$, положив

- $G_0 = H^2$. Параметры этого экспандера: $(d^4, d^2, 1/100)$.
- G_{n+1} есть зигзаг-произведение G_n^2 и H. По индукции доказывается, что экспандер G_n имеет параметры $(d^{4n+4}, d^2, \leqslant 1/2)$. В самом деле, после возведения в квадрат получаем $(d^{4n+4}, d^4, \leqslant 1/4)$, а умножение на $H(d^4, d, 1/10)$ даёт число вершин d^{4n+8}, степень каждой вершины d^2 и третий параметр

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} < \frac{1}{2},$$

  что завершает доказательство.

Мы получили конструкцию экспандера, конторая является эффективной в «слабом» смысле — такие графы можно строить за время полиномиально зависящее от числа вершин. В приложениях нам могут понадобиться экспандеры эффективные в более сильном смысле — графы, для которых по номеру вершины можно эффективно найти список номеров её соседей.

Чтобы более точно определить, что такое эффективная конструкция графа $G = (V, E)$, мы произвольным образом зафиксируем для каждой вершины графа нумерацию инцидентных ей рёбер. *Функцией вращения* называют отображение

$$N \ : \ \langle x, i \rangle \to y,$$

которое сопоставляет вершине графа $x \in V$ и номеру i (не превосходящему степени вершины x) вершину $y \in V$, которая является i-ым соседом x (выйдя из x по i-ому ребру, мы попадём в вершину $y = N(x, i)$).

Если число вершин в графе не превосходит 2^n, а степень каждой вершины равна 2^d, то каждую вершину можно задавать n-битным индексом, а номер выходящего из вершины ребра, соответственно, d-битным индексом. Таким образом, функцию вращения можно понимать как отображение

$$N \ : \ \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^n.$$

Сильная эффективность означает, что время вычисления $N(x, i)$ полиномиально зависит от длины аргументов, т.е., от от логарифма числа вершин и от логарифма степени графа. (Для сравнения: в «слабо эффективной» конструкции графа функция вращения будет вычислимой за время полиномиально зависящее от самого числа вершин графа, а не от его логарифма).

Как происходит вычисление функции N в построенной нами последовательности графов? Номер ребра представляет собой пару чисел, каждое

от 1 до d. Вершина графа G_{n+1} представляет собой пару: одна вершина G_n^2 (=вершина G_n) и одна вершина H. Движение по ребру: сначала идём по ребру H, попадаем в какую-то вершину H (в диапазоне $1 \dots d^4$), воспринимаем её как пару чисел в диапазоне $1 \dots d^2$, рекурсивно идём по двум рёбрам графа G_n и затем делаем ещё ход в H. Таким образом, вычисление N для графа G_{n+1} использует два вызова аналогичного вычисления для G_n, что приводит к экспоненциальной оценке по n, и полиномиальной вычислимости функции N не получается.

Однако можно модифицировать конструкцию, используя не предыдущий граф G_n, а граф с половинным индексом. Для начала выберем граф H с параметрами $(d^8, d, 1/10)$, а затем построим последовательность графов

$$\begin{aligned}
&G_0\colon (1, d^2, \leqslant 1/2)\\
&G_1\colon (d^8, d^2, \leqslant 1/2)\\
&G_2\colon (d^{16}, d^2, \leqslant 1/2)\\
&\quad\dots\\
&G_n\colon (d^{8n}, d^2, \leqslant 1/2)\\
&\quad\dots
\end{aligned}$$

Начальные графы G_0 и G_1 построить легко (G_0 — это граф, состоящий из единственной вершины и d^2 петель, граф G_1 можно получить из H размножением рёбер в d раз, что не меняет собственных чисел). Затем можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$G_n = (G_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \otimes G_{\lceil (n-1)/2 \rceil})^2 ⓩ H,$$

где $\otimes$ обозначает тензорное произведение, а ⓩ — зигзаг-произведение.

Упражнение 12.1 *Докажите индукцией по n, что графы G_n являются спектральными экспандерами с параметрами $(d^{8n}, d^2, \leqslant 1/2)$.*

Преимущество новой конструкции в том, что при вычислении функции вращения два рекурсивных вызова относятся к половинным значениям n; глубина рекурсии теперь стала логарифмической по n, и общее время вычисления полиномиально по n.

Замечание: В приложения часто требуются экспандеры, у которых размер множества вершин есть степень двойки. (Если граф содержит 2^n вершин, то эти вершины можно отождествить с наборами из n нулей и единиц.) Описанная выше конструкция позволяет строить эффективные в сильном смысле графы размера 2^{n_i} для некоторой арифметической прогрессии $\{n_i\}$.