Конспект к лекции 3. (Казань, 5 апреля 2017 г.)

7 От спектрального экспандера к комбинаторному

В этом параграфе мы изучим связь между спектральным и комбинаторным определениями экспандера. Мы покажем, что всякий спектральный экспандер является однородным комбинаторным экспандером (и чем больше зазор между первым и вторым собственным числом у спектрального экспандера, тем более сильные свойства рёберного и вершинного расширения мы можем для гарантировать для этого графа).

Теорема 7.1 *Пусть граф G содержит n вершин, степень каждой вершины равна d и спектр матрицы графа состоит из чисел*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Тогда для любого множества вершин S (непустого и не совпадающего со множеством всех вершин) $\frac{|E(S,\bar{S})|}{\frac{1}{n}\cdot|S|\cdot|\bar{S}|} \geqslant d - |\lambda_2|$.

Замечание: Если $\lambda_2 = d$, то в графе больше одной компоненты связности. Выбрав в качестве множества S одну из компонент связности, мы получим $|E(S,\bar{S})| = 0$ и $|\Gamma(S)| \leqslant |S|$. Так что в графе с нулевым зазором между первым и вторым собственным числом коэффициенты рёберного и вершинного расширения также равны нулю.

С помощью Теоремы 7.1 мы можем установить связь между спектральным и комбинаторным определениями экспандера:

Следствие 7.1 (спектральный зазор $\Longrightarrow$ рёберное расширение) *Для всякого спектрального (n, d, γ)-экспандера*

$$\min_{|S|\leqslant n/2} \frac{|E(S,\bar{S})|}{|S|} \geqslant \frac{d(1-\gamma)}{2},$$

так что $h_E(G) \geqslant \frac{1-\gamma}{2}$.

Следствие 7.2 (спектральный зазор $\Longrightarrow$ вершинное расширение) *Для всякого спектрального (n, d, γ)-экспандера*

$$\min_{|S|\leqslant n/2} \frac{|\Gamma(S)\backslash S|}{|S|} \geqslant \frac{(1-\gamma)}{2},$$

т.е., $h_V(G) \geqslant \frac{1-\gamma}{2}$.

Следствие 7.3 (спектральный зазор $\Longrightarrow$ однородный экспандер) *Если в спектральном (n, d, γ)-экспандере без петель в каждой вершине добавить петлю, мы получим однородный комбинаторный $(n, d+1, \frac{1-\gamma}{2})$-экспандер.*

Доказательство теоремы: Пусть A есть множество вершин графа (размера не более $n/2$). Обозначим $\mathbf{1}_A$ и $\mathbf{1}_{\bar{A}}$ характеристические векторы самого множества A и его дополнения. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{f} = |\bar{A}|\mathbf{1}_A - |A|\mathbf{1}_{\bar{A}},$$

сумма координат которого равна нулю. Его норма

$$||\mathbf{f}||^2 = |\bar{A}|^2 \cdot |A| + |A|^2 \cdot |\bar{A}| = |A| \cdot |\bar{A}| \cdot n$$

Далее мы подсчитаем значение $\mathbf{f}M\mathbf{f}^\top = \sum_{i,j} m_{ij} f_i f_j$. Рассмотрим вклад каждого ребра графа в эту сумму. Если ребро не является петлёй (ребро с концами (i,j), где $i \neq j$), то его вклад состоит из двух слагаемых $f_i f_j + f_i f_j$, что равняется

- $2|\bar{A}|^2$, если оба конца ребра лежат в A,
- $2|A|^2$, если оба конца ребра лежат в $\bar{A}$,
- $-2|A| \cdot |\bar{A}|$, если один конец ребра лежит в A, а другой в $\bar{A}$.

Если же концы рёбра совпадают (ребро является петлей с концами (i,i)), то его вклад в сумму вклад сумму $\sum_{i,j} m_{ij} f_i f_j$ состоит из единственного члена f_i^2. Это число равно

- $|\bar{A}|^2$, если i-ая вершина лежит в A,
- $|A|^2$, если i-ая вершина лежит в $\bar{A}$.

Удобно пересчитать эту сумму, подсчитывая вклад не по рёбрам, а по концам рёбер. В сумму входят слагаемые трёх видов:

- $|\bar{A}|$ для конца каждого ребра, ведущего из A в A (всего таких концов рёбер $d|A| - |E(A,\bar{A})|$),
- $|A|$ для конца каждого ребра, ведущего из $\bar{A}$ в $\bar{A}$ (всего таких концов рёбер $d|\bar{A}| - |E(A,\bar{A})|$),
- $-|A| \cdot |\bar{A}|$ от обоих концов каждого ребра, ведущего из A в $\bar{A}$ (таких рёбер $|E(A,\bar{A})|$).

(в первом и втором пункте мы считаем, что у петли один конец). Таким образом,

$$\mathbf{f}M\mathbf{f}^\top = (d|A| - |E(A,\bar{A})|) \cdot |\bar{A}|^2 + (d|\bar{A}| - |E(A,\bar{A})|) \cdot |A|^2 - 2|E(A,\bar{A})| \cdot |A| \cdot |\bar{A}|.$$

Учитывая, что $|A| + |\bar{A}| = n$, получаем

$$\mathbf{f}M\mathbf{f}^\top = dn|A| \cdot |\bar{A}| - |E(A,\bar{A})|n^2.$$

Разложим вектор $\mathbf{f}$ по векторам ортонормированного собственного базиса матрицы графа:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_n$$

(первый коэффициент в разложении $\mathbf{f}$ по собственному базису равен нулю, поскольку $\mathbf{f}$ ортогонален $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$). Заметим, что

$$\left|\mathbf{f} M \mathbf{f}^\top\right| = \left|\sum_{i \geqslant 2} \lambda_i f_i^2\right| \leqslant |\lambda_2| \cdot ||\mathbf{f}||^2.$$

Сравнивая два выражения для величины $\mathbf{f} M \mathbf{f}^\top$, получаем

$$dn|A| \cdot |\bar{A}| - n^2 \cdot |E(A, \bar{A})| \leqslant \lambda_2 \cdot n|A| \cdot |\bar{A}|,$$

что и требовалось доказать.

8 Спектральные экспандеры: теорема о существовании

Мы изучили разные свойства спектральных экспандеров, однако до сих пор не задавались вопросом о существовании таких графов. Напомним, что мы хотели бы иметь графы, у которых второе по абсолютной величине собственное число мало по сравнению с d. В этой главе мы докажем утверждение о существовании таких графов, хотя и не в самой сильной форме. (Теоремы о существовании, которую мы докажем, достаточно для большинства приложений).

Теорема 8.1 *Пусть $\gamma > 0$ — произвольное число. Тогда для достаточно больших d существует граф с $n = d^4$ вершинами степени d, у которого все собственные числа, кроме первого d, не превосходят по модулю γd.*

Доказательство: Мы докажем, что при определённом соотношении между числом вершин и числом рёбер *почти все* однородные графы обладают таким свойством. Слова «почти все» здесь означают, что при некотором естественном распределении вероятностей случайно выбранный граф оказывается спектральным экспандером (с нужными нам параметрами) с вероятностью близкой к единице.

Прежде всего опишем распределение вероятностей, которое мы будем использовать. Оно будет отличаться от распределения, использованного на первой лекции. Будем считать, что n (число вершин) чётно. Если n чётно, мы имеем право рассмотреть на n вершинах *совершенные паросочетания.* (Совершенное паросочетание есть такой набор из $n/2$ рёбер, что каждая из n вершин является концом ровно одного ребра. Другими словами, совершенное паросочетание на n вершинах есть граф степени 1, состоящий из $n/2$ рёбер.) Мы выбираем на n вершинах d случайных паросочетаний $P_1, \ldots, P_d$ (каждое из d паросочетантий выбирается равномерно; все d выборов делаются независимо). Объединением выбранных паросочетаний мы и будем считать графом G. Отметим, что в таком графе не может быт петель, однако могут быть кратные рёбра (поскольку одно и то же ребро может входить в несколько паросочетаний).

Мы обозначаем собственные числа полученного графа λ_i и считаем, что

$$d = |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Теперь нам нужно оценить λ_2 — второе (по абсолютной величине) собственное число этого графа. При возведении матрицы в степень (мы выберем десятую степень) все собственные числа возводятся в ту же степень и след матрицы станет равным $\lambda_1^{10} + \lambda_2^{10} + \ldots + \lambda_n^{10}$. Первое слагаемое равно d^{10}; если для какой-то матрицы вся сумма близка к d^{10}, то все слагаемые кроме первого малы. А существование такой матрицы будет доказано, если мы убедимся что *среднее* значение следа матрицы M^{10} (для матрицы графа, выбранного случайно описанным выше способом) близко к d^{10}.

В нашем распределении вероятностей все вершины графа равноправны. След M^{10} равен сумме диагональных элементов, поэтому его среднее значение равно среднему значению одного элемента, умноженному на n. А среднее значение одного элемента равно среднему числу путей длины 10, начинающихся и заканчивающихся в данной вершине. Так что нам нужно доказать, что среднее число таких путей чуть больше, чем d^{10}/n.

Подсчёт удобно интерпретировать в терминах вероятностей. Будем считать, что помимо d паросочетаний $P_1, \ldots, P_d$ (напомним, что каждое из которых выбирается независимо, причём все паросочетания равновероятны) мы отдельно (и независимо) выбираем набор из 10 чисел $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})$, каждое число от 1 до d. После этого мы (для фиксированной вершины графа) строим путь длины 10, выходящий из этой вершины. На первом шаге он идёт вдоль паросочетания P_{ω_1}, на втором — вдоль P_{ω_2}, и так далее. Нас интересует вероятность того, что после 10 шагов мы вернёмся в исходную точку. Точнее, мы хотим показать, что она равна $\frac{1}{n} \cdot (1 + o(1))$.

Поменяем порядок усреднения. Если усреднять сначала по выбору ω_i, то получается число петель длины 10 (делённое на d^{10}), которое затем можно усреднять по выбору P_i. Мы же проведём усреднение в другом порядке: сначала для каждого фиксированного набора ω_i мы усредняем по всем графам, и лишь потом усредняем по всевозможным наборам ω_i.

Все наборы $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_{10}$ мы разделим на три категории:

1. гарантированно приводящие в исходную точку (независимо от выбора P_d); к этой категории относятся наборы, в которые после сокращений идущих подряд равных чисел ничего не остаётся;

2. наборы, состоящие из десяти разных чисел.

3. наборы, которые сокращаются не полностью, но в которых присутствуют равные числа (мы идём несколько раз по одному и тому же паросочетанию, но не обязательно подряд).

Для каждого из этих трёх типов наборов ω мы оцениваем количество таких наборов, а также (для каждого фиксированного набора) вероятность получить замкнутый путь при случайном выборе паросочетаний.

1. Количество наборов первого типа не превосходит $O(d^5)$. В самом деле, есть некоторое (фиксированное, так как длина цепочки — число 10 — фиксировано) число способов сокращения, и для каждого способа сокращения имеется не более d^5 способов его реализации (пять сокращающихся пар). Для каждого такого ω вероятность получить замкнутый путь равна 1 — какой бы граф мы не выбрали, путь с пометками ω обязательно приведет в исходную вершину.

2. Наборы без повторений составляют большинство из общего числа d^{10} (при достаточно больших значениях d). При этом вероятность того, что на последнем шаге цикл замкнётся, и мы вернемся в исходную вершину, не превосходит $1/(n-1) = \frac{1}{n} \cdot (1 + o(1))$, поскольку последнее ω_{10} число в наборе ранее не встречалось и соответствующее ω_{10} паросочетание независимо с предыдущими 9 шагами нашего пути.

3. Количество наборов второго типа есть $O(d^9)$, где константа в O-обозначении соответствует числу возможных пар позиций, где происходит совпадение (то есть $C_{10}^2 = 10 \cdot 9/2$).

   Докажем, что вероятность вернуться в исходную точку для такого набора есть $O(1/n)$. Разобьём это событие на случаи в зависимости от того, когда путь в первый раз возвращается в уже пройденную вершину и того, какой эта вершина была по счёту. Разных случаев снова будет не больше C_{10}^2, так что достаточно рассмотреть вероятность одного из них.

   В момент перед назначенным возвращением в уже пройденную вершину уже фиксированы некоторые рёбра некоторых паросочетаний (те, что использованы в пути), а следующее ребро (по которому мы должны попасть в уже посещённую вершину) ещё не фиксировано. Поэтому для его конца остаётся не менее $n - 10$ вариантов, и вероятность выбрать один из них не больше $1/(n-10) = O(1/n)$.

Осталось сложить оценки вероятности из трёх разобранных случаев. Получаем для среднего числа замкнутых путей оценку сверху

$$O\left(\frac{d^5}{d^{10}}\right) \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot (1 + o(1)) + O\left(\frac{d^9}{d^{10}}\right) \cdot O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если $n = d^4$, то второй член в этой сумме будет основным, и потому среднее значение следа есть

$$n \cdot d^{10} \cdot \frac{1}{n}(1 + o(1)) = d^{10}(1 + o(1)).$$

Следовательно, существуют и даже образуют большинство графы, у которых след десятой степени матрицы близок к d^{10} и потому все собственные числа (кроме первого) равны $o(d)$. Таким образом, теорема доказана.

Упражнение 8.1 *Докажите аналогичное утверждение для $n = d^8$.*