

Практика 7

OV49. Определим функцию $GT : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ следующим образом: $GT(x, y) = 1 \iff x \geq y$, где x и y мы воспринимаем как числа в битовой записи. Докажите, что $CC(GT) = n + 1$.

OV50. Покажите, что $CC(MED) = \mathcal{O}(\log^2 n)$, где x и y это характеристические функции подмножеств $[n]$, а $MED(x, y)$ — медиана их объединения.

Remark: на самом деле $CC(MED) = \Theta(\log n)$.

OV51. У Алисы и Боба есть по строке длины n . Посмотрим на эти строки как на характеристические функции некоторых подмножеств. Алиса и Боб хотят найти $AVG(x, y)$: среднее арифметическое мультимножества, получаемого при объединении их множеств. Докажите, что:

$$\log n \leq CC(AVG) \leq c \log n,$$

для некоторой константы c .

OV52. У Алисы имеется n -битная строка x , а у Боба n -битная строка y . Известно, что y получен из x инвертированием одного бита. Покажите, что глубина любого коммуникационного протокола, позволяющего Алисе узнать y , а Бобу x , не менее $2 \log n$.

OV53. Рассмотрим функцию $max : \{0, \dots, 2^n - 1\} \times \{0, \dots, 2^n - 1\} \rightarrow \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq y \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$$

Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность функции max не превосходит $\frac{3}{2}n + \mathcal{O}(1)$.

OV54. Рассмотрим булеву функцию $Disj(x, y)$, где $x, y \in \{0, 1\}^n$ — характеристические векторы множеств, которая возвращает 1 тогда и только тогда, когда $x \cap y = \emptyset$. Докажите, что $CC(Disj) = \Omega(n)$.

OV55. Рассмотрим функцию $IP : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, где $IP(x, y) = \sum_i x_i y_i \pmod 2$. Докажите, что коммуникационная сложность IP равна $n - \mathcal{O}(1)$.