Бесконечность и её роль в информатике

Марченко Антон Александрович
Anton.Marchenko@kpfu.ru

Зачем нам нужно понятие бесконечности?

- Всё, что мы видим вокруг себя, каждый объект, с которым мы имеем дело, конечен

Зачем нам нужно понятие бесконечности?

- Всё, что мы видим вокруг себя, каждый объект, с которым мы имеем дело, конечен
- Зачем же тогда бесконечность?

Зачем нам нужно понятие бесконечности?

- Всё, что мы видим вокруг себя, каждый объект, с которым мы имеем дело, конечен
- Зачем же тогда бесконечность?
- Бесконечность – незаменимый инструмент для успешного исследования конечного мира

Натуральные числа

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

Формальное определение натуральных чисел (Джузеппе Пеано, 1889)

- 1 является натуральным числом
- Число, следующее за натуральным, является натуральным
- 1 не следует ни за каким числом
- Если a следует за b и c, то $b = c$
- **Аксиома индукции:** Если предположение верно для 1 и из допущения того, что оно верно для n следует то, что оно верно для $n + 1$, то предположение верно для всех натуральных чисел

Потенциальная и актуальная бесконечность

- Потенциальная бесконечность - характеризуется неограниченностью некоторого процесса, но из него не следует существования самостоятельного бесконечного объекта.
  пример: натуральные числа, прямая в геометрии

- Актуальная бесконечность - рассмотрение бесконечных объектов как единых и целостных.

  Мы не можем видеть актуальную бесконечность. Мы можем обозревать только конечную часть бесконечного объекта, поэтому используются символьные обозначения в качестве конечного представления бесконечных объектов.

Бесконечно малые величины в потенциально бесконечных процессах

Каково наименьшее положительное рациональное число?

Процесс сокращения числа - бесконечен. Для каждого положительного числа, есть меньшее число.

Математическое описание бесконечно малых величин, созданное Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем стало основой математического анализа.

Бесконечность лежит в основе пределов, производных, интегралов и дифференциальных уравнений.

Бесконечность в информатике

- Нам нужно отличать конечные вычисления от бесконечных.
- Существует бесконечно много программ и алгоритмических задач.
- Вычислительная задача состоит из бесконечного множества конкретных примеров.

Бесконечность – важный инструмент исследований в информатике

Бесконечность в информатике

Существует только один вид бесконечности или есть несколько различающихся по размеру бесконечностей?

- Рассмотрим некоторые из наиболее важных открытий в исследовании бесконечности для того, чтобы ответить на этот вопрос
- Сравним количество алгоритмических(вычислительных) задач и количество программ
- Ответим на вопрос: «можно ли всё автоматизировать или есть задачи, которые не под силу ни одному компьютеру?»

Понятие множества

Множество – совокупность попарно отличающихся элементов

Примеры:

1. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ – множество простых чисел, не превышающих 30-и
2. $\{\text{Иван}, \text{Анна}, \text{Петр}, \text{Ольга}\}$ – множество из четырех имен.

Для множества A обозначение $|A|$ используется для указания количества элементов.

$|A|$ – мощность множества A

$$|P_{30}| = 10, \; |\{\text{Иван}, \text{Анна}, \text{Петр}, \text{Ольга}\}| = 4.$$

Бесконечные множества

Конечные множества сравниваются как числа через значения их мощностей.

Что тогда с бесконечными множествами?

Если обозначить бесконечность знаком ∞, то количество элементов каждого бесконечного множества будет ∞.

Как соотносятся $|\mathbb{N}|$, $|\mathbb{N}_0|$, $|\mathbb{Z}|$, $|\mathbb{Q}^+|$, $|\mathbb{R}|$?

Как сравнивать размеры двух множеств?

Сравнение размеров множеств. Концепция Георга Кантора

Для бесконечных множеств подсчет количества элементов невозможен.
Нужно определить отношение «меньше или равно» для сравнения мощностей двух множеств.

Определение

Между множествами A и B есть соответствие, если для множества пар (a, b) выполняется:

1. $a \in A$ *и* $b \in B$.
2. *Каждый элемент из A является первым элементом только одной пары.*
3. *Каждый элемент из B является вторым элементом только одной пары.*

Сравнение размеров множеств. Концепция Георга Кантора

Множества A и B одного и того же размера, если между элементами A и B существует соответствие.

Если после разбора элементов из A и B по парам некоторые элементы остаются без пар, то множество, которому они принадлежат, больше.

Сравнение размеров множеств

Между множествами четных и нечетных натуральных чисел можно установить соответствие $(2k-1,\ 2k),\ k \geq 1.$
Следовательно,

$$|\mathbb{N}_{\text{чет}}| = |\mathbb{N}_{\text{нечет}}|$$

Между множествами положительных и отрицательных целых чисел можно установить соответствие $(k,\ -k),\ k \geq 1.$
Следовательно,

$$|\mathbb{Z}^{+}| = |\mathbb{Z}^{-}|$$

Свойство бесконечных множеств

Между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ существует соответствие $(k,\ k-1),\ k \geq 1$. Следовательно,

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$$

Множество бесконечно, если существует его собственное подмножество такое же большое, как и всё множество.

Свойство бесконечных множеств

Установим соответствие между

- $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{N}$

Отель Гильберта

Давид Гильберт предложил пример, демонстрирующий парадоксальность бесконечности.

Бесконечная гостиница с бесконечным числом номеров, заполненная бесконечным числом посетителей.

Ситуации:

1. В гостиницу прибыл еще один гость
2. В гостиницу прибыл автобус с бесконечным числом гостей
3. В гостиницу заселяется бесконечное число автобусов с бесконечным числом гостей

Отель Гильберта

Бесконечная гостиница с бесконечным числом номеров, заполненная бесконечным числом посетителей.

Для $\infty = |\mathbb{N}|$ показали что:

1. В гостиницу прибыл еще один гость: $\infty = \infty + 1$
2. В гостиницу прибыл автобус с бесконечным числом гостей: $\infty = \infty + \infty$ или $\infty = 2 \cdot \infty$
3. В гостиницу заселяется бесконечное число автобусов с бесконечным числом гостей: $\infty = \infty \cdot \infty$

Бесконечности разного размера

Показали, что $|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$ и $\infty \cdot \infty = \infty$

Более того, можно показать, что
$$\underbrace{|\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{N}| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{N}|}_{k \text{ раз}} = \underbrace{\infty \cdot \infty \cdot \ldots \cdot \infty}_{k \text{ раз}} = \infty^k$$

Хотя мы близко подошли к тому, чтобы посчитать что все бесконечности одинакового размера, далее мы покажем что $|\mathbb{R}^+| > |\mathbb{N}|$.

Более того, для того чтобы доказать это утверждение, докажем даже более строгий результат $|[0, 1]| \neq |\mathbb{N}|$.
Для этого докажем, что не существует соответствия между этими множествами.

Бесконечности разного размера

Доказательство того что $|[0, 1]| \neq |\mathbb{N}|$ будем вести от противного.

Предположим что существует нумерация действительных чисел на отрезке $[0, 1]$.

	0	1	2	3	$\cdots$	i	$\cdots$
1	0.	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$
2	0.	a_{21}	$\boxed{a_{22}}$	a_{23}	$\cdots$	a_{2i}	$\cdots$
3	0.	a_{31}	a_{32}	$\boxed{a_{33}}$	$\cdots$	a_{3i}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
i	0.	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$\cdots$	$\boxed{a_{ii}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Метод диагонализации Кантора

Выпишем число, не представленное ни одной строкой таблицы.

Изменим цифры c_i на диагонали на $(c_i + 1)\ mod\ 10$.

Так, полученное число отличается одной цифрой от каждой строки таблицы. Следовательно, предположение о том, что существует нумерация $[0, 1]$ неверно.

Не существует нумерации действительных чисел из отрезка $[0, 1]$, следовательно не существует соответствия между $\mathbb{N}$ и $[0, 1]$.

Самые важные идеи

- Можно сравнивать размеры множеств через их мощности
- Кантор предложил концепцию сравнения бесконечных множеств по принципу «пастуха»
- Множества имеют одинаковый размер, если существует соответствие между их элементами
- Собственные подмножества бесконечных множеств такого же размера, как и целые множества
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
- Поскольку $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ и не существует соответствия между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^+$ можно сделать вывод что $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}^+|$

Спасибо за внимание!